Межрегиональная молодежная школа-семинар «Моделирование социо-эколого-экономических процессов в регионе»
(г. Улан-Удэ, 15 ноября 2012 г.)

Оптимизация параметров динамических систем поиском неподвижных точек оператора проектирования

Хишектуева И.-Х.Д.

Постановка задачи

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x(t), u, t)dt \to \min_{u \in U},$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u, t), \quad x(t_0) = x^0,$$

$$u \in U \subset R^m, \quad t \in T = [t_0, t_1],$$

где $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ *— вектор состояния,*

$u = (u_1, ..., u_m)$ *— вектор управляющих параметров.*

Начальное состояние x^0 *и интервал* T *фиксированы*

Условия ДПМ

1) *функция* $\varphi(x)$ *непрерывно* $-$ *дифференцируема на* R^n, *вектор* $-$ *функция* $F(x,u,t)$, *векторная функция* $f(x,u,t)$ *и их производные* $F_x(x,u,t)$, $F_u(x,u,t)$, $f_x(x,u,t)$, $f_u(x,u,t)$, *непрерывны по совокупности аргументов* (x,u,t) *на множестве* $R^n \times U \times T$;

2) *функция* $f(x,u,t)$ *удовлетворяет условию Липшица по* x *в* $R^n \times U \times T$ *с константой* $L > 0$

$$\|f(x,u,t) - f(y,u,t)\| \le L\|x - y\|.$$

Функция Понтрягина и стандартная сопряженная система

$$H(\psi, x, u, t) = \left\langle f(x, u, t), \psi \right\rangle - F(x, u, t),$$

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u, t), \quad t \in T,$$

$$\psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)).$$

Дифференциальный принцип максимума

ДПМ для управления $u \in U$ *принимает вид*

$$u = \arg\max_{w \in U} \left\langle \int_T H_u(\psi(t,u), x(t,u), u, t)\,dt, w \right\rangle.$$

Данное условие можно представить в форме

$$u = P_U(u + \alpha \int_T H_u(\psi(t,u), x(t,u), u, t)\,dt), \quad \alpha > 0.$$

Дифференциальный принцип максимума в форме задачи о неподвижной точке

Определим оператор управления

$$G(u) = P_U\left(u + \alpha \int_T H_u(\psi(t,u), x(t,u), u, t)\,dt\right), \; u \in U.$$

Тогда ДПМ представляется как задача о неподвижной точке оператора

$$u = G(u)$$

Итерационный процесс решения задачи

Для решения задачи о неподвижной точке применим метод простой итерации

$$u^{k+1} = G(u^k)$$

Итерационный процесс решения задачи рассматривается в форме

$$u^{k+1} = P_U(u^k + \alpha \int_T H_u(\psi(t,u^k), x(t,u^k), u^k, t)dt), \alpha > 0$$

Пример

$$\Phi(u) = x_2(1) \to \min$$

$$\dot{x}_1(t) = u, \qquad x_1(0) = 0$$

$$\dot{x}_2(t) = -(x_1(t))^2, \qquad x_2(0) = 0$$

$$|u| \le 1, \quad t \in T = [0,1]$$

Решение

$$H(\psi, x, u, t) = \psi_1 u - \psi_2 x_1^2$$

$$\dot{\psi}_1(t) = 2\psi_2 x_1, \qquad \psi_1(1) = 0$$

$$\dot{\psi}_2(t) = 0, \qquad \psi_2(1) = -1$$

$$u^0 = \frac{1}{2},$$

$$x_1(t, u^0) = \frac{1}{2}t, \; x_2(t, u^0) = -\frac{1}{12}t^3, t \in T$$

$$\Phi(u^0) = -\frac{1}{12} \approx -0.083$$

Решение

Оптимальное решение $u^* = \pm 1.$

1 *итерация*

$$u^1 = P_U\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\alpha\right),\ \alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad u^1 = \frac{5}{6}.$$

$$\Phi(u^1) = -\frac{25}{108} \approx -0.23 < \Phi(u^0) \approx -0.083$$

2 *итерация*

$$u^2 = P_U\left(\frac{5}{6} + \frac{5}{9}\alpha\right) \quad \Rightarrow \quad u^2 = 1$$

Отсюда, $\quad u^* = 1, \quad \Phi(u^*) = -\dfrac{1}{3}$

Свойства метода

1. *Отсутствие трудоемкой операции параметрического поиска управления*
2. *Простота реализации*